一般選抜問題　前期（Ａ日程）

数　学

（ 問題：全６ページ ）

（ 解答番号： $\boxed{1}$ ～ $\boxed{72}$ ）

数学の問題には，必答問題と学科別問題があります。
第１問は記述解答問題です。記述問題解答用紙に解答してください。

記述問題解答用紙には受験番号，氏名を必ず記入してください。

$\boxed{\text{必答問題}}$　第１問および第２問は必ず解答してください。

（ 第１問　　　　　記述問題解答用紙に解答 ）
（ 第２問　解答番号： $\boxed{1}$ ～ $\boxed{16}$ ）

$\boxed{\text{学科別問題}}$

機械システム工学科／電子ロボット工学科志願者

第３問と第４問を解答してください。
（ 第３問　解答番号： $\boxed{17}$ ～ $\boxed{29}$ ）
（ 第４問　解答番号： $\boxed{30}$ ～ $\boxed{42}$ ）

情報メディア学科志願者

第５問と第６問を解答してください。
（ 第５問　解答番号： $\boxed{43}$ ～ $\boxed{58}$ ）
（ 第６問　解答番号： $\boxed{59}$ ～ $\boxed{72}$ ）

第１問（必答問題）

以下の記述解答問題を，記述問題解答用紙に解答せよ。

平面上に２点 A$(2,\ 2)$，B$(1,\ -1)$ があり，点 P が円 $x^2+y^2=1$ 上を動くとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ の最小値とそのときの点 P の座標を求めよ。

第２問（必答問題）

以下の式中または文中の $\boxed{\ 1\ }$ ～ $\boxed{\ 16\ }$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 1 ～ 16 の解答欄にマークして答えよ。ただし，分数形で解答する場合は，それ以上約分できない分数の形で答えよ。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えよ。

［1］ $k>0$ とし，2 直線 $y=\dfrac{1}{2k}x$，$y=-6kx$ のなす鋭角を θ とする。θ の最小値とそのときの定数 k の値を求める。

2 直線 $y=\dfrac{1}{2k}x$，$y=-6kx$ と x 軸の正の向きとの成す角を，それぞれ α，β とすると

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2k}$，$\tan\beta=-6k$ より，$\tan(\beta-\alpha)=\boxed{\ 1\ }k+\dfrac{\boxed{\ 2\ }}{\boxed{\ 3\ }k}$ となり，

$\tan(\beta-\alpha)>0$ であるから，2 直線の成す鋭角 θ は，$\theta=\beta-\alpha$ となる。

ここで，$\boxed{\ 1\ }k>0$ と $\dfrac{\boxed{\ 2\ }}{\boxed{\ 3\ }k}>0$ に対して，相加平均と相乗平均の関係より，

$$\tan\theta=\boxed{\ 1\ }k+\frac{\boxed{\ 2\ }}{\boxed{\ 3\ }k}\geqq\sqrt{\boxed{\ 4\ }}$$

となる。したがって，$k=\dfrac{\boxed{\ 5\ }}{\boxed{\ 6\ }\sqrt{\boxed{\ 7\ }}}$ のとき，θ の最小値は $\dfrac{\pi}{\boxed{\ 8\ }}$ となる。

［2］ 不等式 $8(\log_{\frac{1}{16}}x)^2-10\log_{\frac{1}{16}}x+3<0$ を解くと，

$\dfrac{\boxed{\ 9\ }}{\boxed{\ 10\ }}<\log_{\frac{1}{16}}x<\dfrac{\boxed{\ 11\ }}{\boxed{\ 12\ }}$ より，$\dfrac{\boxed{\ 13\ }}{\boxed{\ 14\ }}<x<\dfrac{\boxed{\ 15\ }}{\boxed{\ 16\ }}$ となる。

第3問（学科別問題）（機械システム工学科／電子ロボット工学科の志願者は，この問題を選択して解答せよ。）

以下の式中または文中の $\boxed{17}$ ～ $\boxed{29}$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 17 ～ 29 の解答欄にマークして答えよ。

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n について，$S_n = 2a_n - n^2$ が成り立っているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

数列 $\{a_n\}$ の初項は，$a_1 = S_1$ より，$a_1 = \boxed{17}$ となる。

また，$n \geqq 2$ に対して，$a_n = S_n - S_{n-1}$ より，漸化式

$$a_n = \boxed{18}\,a_{n-1} + \boxed{19}\,n - \boxed{20} \quad (n \geqq 2) \qquad \cdots\cdots ①$$

が得られる。数列 $\{a_n\}$ に対して，$b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n \geqq 1)$ によって，階差数列 $\{b_n\}$ を定めると，階差数列 $\{b_n\}$ の初項は，$b_1 = \boxed{21}$，$n \geqq 2$ に対しては，漸化式①を用いると，

$$b_n = \boxed{22}\,b_{n-1} + \boxed{23} \quad (n \geqq 2) \qquad \cdots\cdots ②$$

となる。漸化式②は，$\alpha = \boxed{22}\,\alpha + \boxed{23}$ を満たす α を用いて

$$b_n + \boxed{24} = \boxed{25}\left(b_{n-1} + \boxed{24}\right) \quad (n \geqq 2) \qquad \cdots\cdots ③$$

と変形できるから，数列 $\left\{b_n + \boxed{24}\right\}$ は，初項 $\boxed{26}$，公比 $\boxed{25}$ の等比数列となる。これより，階差数列 $\{b_n\}$ の一般項 $b_n = \boxed{26} \cdot \boxed{25}^{\,n-1} - \boxed{24}$ が求まる。

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \boxed{27} \cdot \boxed{25}^{\,n} - \boxed{28}\,n - \boxed{29} \qquad \cdots\cdots ④$$

となる。この式に $n = 1$ を代入すると，$a_1 = \boxed{17}$ が得られるから，④は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = \boxed{27} \cdot \boxed{25}^{\,n} - \boxed{28}\,n - \boxed{29}$ となる。

第４問（学科別問題）（機械システム工学科／電子ロボット工学科の志願者は，この問題を選択して解答せよ。）

以下の式中または文中の $\boxed{\ 3\ 0\ }$ ～ $\boxed{\ 4\ 2\ }$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 30 ～ 42 の解答欄にマークして答えよ。ただし，分数形で解答する場合は，それ以上約分できない分数の形で答えよ。$\boxed{\ 4\ 1\ }$ と $\boxed{\ 4\ 2\ }$ の解答については，解答の順序は問わない。

関数 $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(2-x)}$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\right)$ について考える。

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，$f'(x)=\dfrac{\boxed{\ 3\ 0\ }\,x-\boxed{\ 3\ 1\ }}{(x+1)^2(2-x)^2}$ となる。

関数 $f(x)$ は，$x=\dfrac{\boxed{\ 3\ 2\ }}{\boxed{\ 3\ 3\ }}$ のとき，最大値 $\dfrac{\boxed{\ 3\ 4\ }}{\boxed{\ 3\ 5\ }}$ をとり，

$x=\dfrac{\boxed{\ 3\ 6\ }}{\boxed{\ 3\ 7\ }}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{\ 3\ 8\ }}{\boxed{\ 3\ 9\ }}$ をとる。

定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx$ の値を求める。

関数 $f(x)$ は，$f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(2-x)}=\dfrac{1}{\boxed{\ 4\ 0\ }}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2-x}\right)$ と変形されるから，

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx &= \frac{1}{\boxed{\ 4\ 0\ }}\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2-x}\right)dx \\
&= \frac{1}{\boxed{\ 4\ 0\ }}\left(\log_e \boxed{\ 4\ 1\ } + \log_e \boxed{\ 4\ 2\ }\right)
\end{aligned}
$$

となる。

第５問（学科別問題）（情報メディア学科の志願者は，この問題を選択して解答せよ。）

以下の式中または文中の $\boxed{\ 43\ }$ 〜 $\boxed{\ 58\ }$ に入る正しい数字（０〜９）を，マークシート上の該当する番号 43 〜 58 の解答欄にマークして答えよ。ただし，分数形で解答する場合は，それ以上約分できない分数の形で答えよ。

赤，白のカードが５枚ずつあり，それぞれ１から５までの番号が書いてある。

この 10 枚のカードから同時に３枚引くとき，次の確率を考える。

(1)　３枚とも赤のカードである確率は $\dfrac{\boxed{\ 43\ }}{\boxed{\ 44\ }\boxed{\ 45\ }}$ である。

(2)　少なくとも１枚は１のカードである確率は $\dfrac{\boxed{\ 46\ }}{\boxed{\ 47\ }\boxed{\ 48\ }}$ である。

(3)　和が偶数となる確率を求める。

和が偶数となる場合は，３枚とも偶数のカードのときと，２枚が奇数のカードで残りの１枚が偶数のカードのときで，これらは互いに排反である。

したがって，和が偶数となる確率は $\dfrac{\boxed{\ 49\ }}{\boxed{\ 50\ }\boxed{\ 51\ }}$ である。

(4)　３枚とも赤のカードか，または和が偶数となる確率を求める。

３枚とも赤のカードで和が偶数となる確率は $\dfrac{\boxed{\ 52\ }}{\boxed{\ 53\ }\boxed{\ 54\ }}$ となるから，これと前問 (1)，(3) より，３枚とも赤のカードか，または和が偶数となる確率は $\dfrac{\boxed{\ 55\ }\boxed{\ 56\ }}{\boxed{\ 57\ }\boxed{\ 58\ }}$ である。

第6問（学科別問題）（情報メディア学科の志願者は，この問題を選択して解答せよ。）

以下の式中または文中の $\boxed{\text{5 9}}$ ～ $\boxed{\text{7 2}}$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 59 ～ 72 の解答欄にマークして答えよ。ただし，分数形で解答する場合は，それ以上約分できない分数の形で答えよ。

関数 $f(x)$ は次の等式

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

を満たしている。

まず，① を満たす関数 $f(x)$ を求める。$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ は定数であるから，k を定数として，

$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = k$ とおくと，

$$k = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \left[\frac{1}{\boxed{\text{5 9}}} t^4 + t^3 - \frac{\boxed{\text{6 0}}}{\boxed{\text{6 1}}} t^2 + kt \right]_{-1}^{1} = \boxed{\text{6 2}} + \boxed{\text{6 3}}\,k$$

より，$k = -\boxed{\text{6 4}}$ となる。したがって，① を満たす関数 $f(x)$ は

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - \boxed{\text{6 4}} \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

となる。

次に，関数 $f(x)$ の極値を求める。

導関数は，$f'(x) = \boxed{\text{6 5}}\,x^2 + \boxed{\text{6 6}}\,x - \boxed{\text{6 7}}$ であるから，これと ② より，

$x = -\boxed{\text{6 8}}$ のとき，極大値 $\boxed{\text{6 9}}\,\boxed{\text{7 0}}$ をとり，$x = \boxed{\text{7 1}}$ のとき，極小値 $-\boxed{\text{7 2}}$ をとる。